التمرين الأول : 60 درجة

العلامة

$z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$

1) أوجد z_1 , z_2 , $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الأسي

الحل

(20) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2\, e^{i\frac{-\pi}{6}}$

$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(10) $\frac{z_1}{z_2}$ $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

2) أوجد $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$$

(10) جبري $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4} i$

3) استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$

لنكتب الشكل المثلثي لـ $\frac{z_1}{z_2}$

(10) مثلثي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{5\pi}{12}\, i$

نطابق الجبري مع المثلثي :

(5) حقيقي : $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) تخيلي : $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

$\therefore \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

تمرين 2 : 60 درجة

العلامة

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $w = -5+12i$

نتبع

(10) ① $x^2+y^2 = 13$

(10) ② $x^2-y^2 = -5$

(10) ③ $2xy = 12$

من ① و ② جمعاً

$2x^2 = 8$

(10) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$, $x = -2$

من ① و ② طرحاً

$2y^2 = 18 \Rightarrow$

(10) $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$, $y = -3$

من ③ $xy > 0$ x, y من نفس الإشارة

(10) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -2-3i$ الجذران

التمرين الثالث (٥٠)

ليكن f التابع المعرف على R وفق

(١٠) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$

١) ادرس قابلية اشتقاق f عند (٠) من اليسار

نأخذ (١٠) $T(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$: f(0)=2$

$x<0$

$= \dfrac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x-0}$

(١٠) $T(x) = \dfrac{\frac{3x}{-x+1}}{x} = \dfrac{3}{-x+1}$

$\lim\limits_{x\to 0} T(x) = 3 = f'(0) = m \Rightarrow$

(١٠) f قابل للاشتقاق عند (٠) من اليسار

٢) اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار لخط البياني في النقطة $A(0,2)$

الحل: النقطة $A(0,2)$ (٥)

الميل $m = f'(0) = 3$ (٥)

معادلة المماس:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

(١٠) $y - 2 = 3(x-0)$

$y = 3x+2$

التمرين الرابع (٥٠)

ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$ المعرف على R

١) اوجد نهاية التابع عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

٢) اكتب الصيغة القانونية لـ $x^2+6x+10$

٣) اثبت أن $d: y = x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل: ١)

(١٠) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty \\ x\to +\infty}} f(x) = +\infty$

٢) x^2+6x+9 ...

(١٠) $(x+3)^2+1$

ومنه $f(x) = \sqrt{(x+3)^2+1}$

٣)

(١٠) $f(x) - y_d = \sqrt{(x+3)^2+1} - (x+3)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - y_d) \Rightarrow \infty - \infty$ عدم تعيين

(١٠) نضرب بالمرافق

$f(x) - y_d = \dfrac{\left[\sqrt{(x+3)^2+1}-(x+3)\right]\left[\sqrt{(x+3)^2+1}+(x+3)\right]}{\sqrt{(x+3)^2+1}+(x+3)}$

(١٠) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{(x+3)^2+1}+(x+3)} = 0$

$\Leftarrow$ d مقارب مائل لـ C في $(+\infty)$

أما

(١٠) $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - y_d] = \infty + \infty = +\infty$

فلا يوجد مقارب مائل لـ C في جوار $(-\infty)$

جواب السؤال الاول : 50 درجة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x} & : x\neq 0\\ 2m-1 & : x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

الحل : بما ان f مستمر على R فهو مستمر عند (0)

(10) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

(10) $\lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to 0} \frac{[2-\sqrt{x^2+4}][2+\sqrt{x^2+4}]}{x[2+\sqrt{x^2+4}]}$$

$$\lim \frac{\cancel{4}-x^2-\cancel{4}}{x[2+\sqrt{x^2+4}]}$$

(10)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{2+\sqrt{x^2+4}} = 0 = f(0) = 2m-1$$

(20) $\Rightarrow m=\frac{1}{2}$

جواب السؤال الثاني : 50 درجة

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$ (1)

نضرب بالمرافق

$$\lim \frac{[\cos x-1][\cos x+1]}{x[\cos x+1]}$$

$$\lim \frac{\cos^2 x - 1}{x[\cos x+1]}$$

$$\lim \frac{-\sin^2 x}{x[\cos x+1]}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x+1} = 1(0) = 0$$

(2)

$$g(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$h(x)=\tan x$ قابلة للاشتقاق على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$h'(x)=1+\tan^2 x$

$h(\frac{\pi}{4})=1$

$h'(\frac{\pi}{4})=2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = h'(\frac{\pi}{4}) = 2$$

السؤال الثالث 60 درجة

المقدار $w=\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ حقيقي

اما $\bar{z}=z$ او $|u|=1$

نفرض

$\bar{w}=w$

$$\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$$

$$(1-u)(\bar{z}-\bar{u}z)=(1-\bar{u})(z-u\bar{z})$$

$$\bar{z}-\bar{u}z-u\bar{z}+u\bar{u}z=z-u\bar{z}-\bar{u}z+u\bar{u}\bar{z}$$

$$\bar{z}-z+u\bar{u}z-u\bar{u}\bar{z}=0$$

$$\bar{z}-z+u\bar{u}(z-\bar{z})=0$$

$$(\bar{z}-z)-u\bar{u}(\bar{z}-z)=0$$

$$(\bar{z}-z)(1-u\bar{u})=0$$

اما $\bar{z}-z=0 \Rightarrow z=\bar{z} \Rightarrow z$ حقيقي

او $1-u\bar{u}=0 \Rightarrow u\bar{u}=1 \Rightarrow |u|=1$

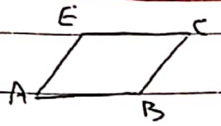
حل المسألة الأولى: (100 درجة)

1) $\vec{W} = 2\vec{AB} - 3\vec{CD}$

$\vec{W} = 2(-1,-1,4) - 3(-4,4,0)$

(10) $\vec{W} = (10,-14,-8)$

2) $E(x,y,z)$



$\vec{AB} = \vec{EC}$

$(-1,-1,-4) = (4-x,-y,-z)$

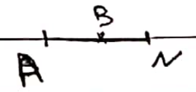
$-1 = 4-x \Rightarrow x = 5$

$-1 = -y \Rightarrow y = 1$

$-4 = -z \Rightarrow z = 4$ $\Rightarrow E(5,1,4)$

(15)

3) $N(x,y,z)$



$\vec{AB} = \vec{BN}$

$(-1,-1,-4) = (x-1,y,z+1)$

$-1 = x-1 \Rightarrow x = 0$

$-1 = y$

$-4 = z+1 \Rightarrow z = -5$ $\Rightarrow N(0,-1,-5)$

(15)

4) M تحقق $CM = DM$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+(y-4)^2+z^2}$

نربع $(x-4)^2+y^2+z^2 = x^2+(y-4)^2+z^2$

$x^2-8x+16+y^2+z^2 = x^2+y^2-8y+16+z^2$

$8x-8y=0$

مجموعة M تمثل معادلة مستوي محوري $[CD]$ (20)

5) معادلة الكرة:

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = R^2 = AC^2$

20 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 14$

6) $F(2,1,t)$

$\vec{AC}(2,-1,-3), \vec{AB}(-1,-1,-4)$

مركباتها غير متناسبة $(\frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{-1})$ يحددان مستوي

$\vec{AF} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

$(0,0,t-3) = \alpha(-1,-1,-4) + \beta(2,-1,-3)$

بالطرح

$0 = -\alpha + 2\beta$ (1) $\Rightarrow \beta = 0$

$0 = -\alpha - \beta$ (2) $\Rightarrow \alpha = 0$

$t-3 = -4\alpha - 3\beta$ (3) $\Rightarrow t-3 = 0$

(30) $\boxed{t = 3}$

حل المسألة الثانية: (100 درجة)

أ) $I = [0,+\infty[$ $f(x) = x - 1 - \sqrt{x}$

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) \Rightarrow \infty - \infty$

$f(x) = x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty[1-0-0] = \infty$

(10) $f(0) = 0-1-0 = -1$

2) المشتقة f اشتقاقية على $]0,\infty[$

(10) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 1 = 0$

(10) $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{-5}{4}$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
f'	|	$-$	0	$+$	
f	-1	$\searrow$	$\frac{-5}{4}$	$\nearrow$	∞

(20)

3) f متناقصة تماماً على $[0,\frac{1}{4}[$

فلا يوجد جذر في $[0,\frac{1}{4}[$: $0 \notin f([0,\frac{1}{4}[) =]\frac{-5}{4},-1]$

f متزايدة تماماً على $[\frac{1}{4},\infty[$ $\Leftarrow$

$0 \in f([\frac{1}{4},+\infty[) = [\frac{-5}{4},+\infty[$ $\Leftarrow$

للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد $\Leftarrow$

(20) $\alpha \in [\frac{1}{4},+\infty[$

4) معادلة المماس

نقطة $x = 4 \Rightarrow y = 1$ $N(4,1)$

الميل $f'(4) = \frac{3}{4}$

المعادلة $y - 1 = \frac{3}{4}(x-4)$

$d: y = \frac{3}{4}x - 2$

(30)